数理解析研究所講究録
971 巻 1996 年 90-100

代数体の 2 次拡大の相対 3 類数と相対岩澤不変量

木村 巌*
KIMURA Iwao
筑波大学博士課程数学研究科

1 主な結果

有理数体を $\mathbb{Q}$, 複素数体を $\mathbb{C}$ として, 以下代数体, 即ち $\mathbb{Q}$ の代数的拡大体はすべて $\mathbb{C}$ に含まれていると仮定する. K を勝手な有限次代数体とし, $\mathbb{Z}_3$ を 3 進整数環の加法群, K_∞ を K の basic $\mathbb{Z}_3$-拡大とする. K_∞/K の岩澤 λ-, μ-不変量をそれぞれ $\lambda(K), \mu(K)$ と書く. 更に K が有限次 CM-体の時は, その最大実部分体を K^+ と書き, basic $\mathbb{Z}_3$-拡大 K_∞/K の相対岩澤 λ-, μ-不変量をそれぞれ,

$$\lambda^-(K) = \lambda(K) - \lambda(K^+), \quad \mu^-(K) = \mu(K) - \mu(K^+)$$

により定義する. この節を通して, 有限次総実代数体 k を固定し, $n = [k:\mathbb{Q}]$ とする. v を k の素点とする時, k の v における完備化を k_v とし, さらに v が有限素点のとき, k_v の剰余体の位数を q_v と書く. k の素点で 3 の上にあるもの全ての集合を T とする. S が有限集合のとき, $|S|$ をその濃度とする. この報告では, 次に挙げる二つの結果の証明の概略を述べる. (詳細は [8] に発表予定.)

定理 1.

$K^+ = k$ となるすべての CM-体の集合を $\mathcal{C}$ とすれば,

*iwao@math.tsukuba.ac.jp

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{|\{K \in \mathcal{C} \mid \lambda^-(K) = \mu^-(K) = 0, D_{K/k} \leq X\}|}{|\{K \in \mathcal{C} \mid D_{K/k} \leq X\}|} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{|T|+1} \prod_{v \in T} \left(\frac{q_v + 2}{q_v + 1}\right).$$

ただし, 各 $K \in \mathcal{C}$ に対し, $D_{K/k}$ は K/k の相対判別式の $k/\mathbb{Q}$ に関するノルムである. 従って特に, 有限次 CM-体 K で,

$$\lambda^-(K) = \mu^-(K) = 0, \quad K^+ = k$$

を満たすものが無限個存在する.

定理 2.

$|T| = 1$ であって, k の類数は 3 で割れり切れないと仮定する. このとき, k の総実な 2 次拡大体すべての集合を $\mathcal{T}$ とすれば,

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{|\{F \in \mathcal{T} \mid \lambda(F) = \mu(F) = 0, D_{F/k} \leq X\}|}{|\{F \in \mathcal{T} \mid D_{F/k} \leq X\}|} \geq \left(1 - \frac{1}{2\cdot 3^n}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{q_v + 2}{q_v + 1}.$$

従って特に, k の 総実な 2 次拡大 F で,

$$\lambda(F) = \mu(F) = 0$$

を満たすものが無限個存在する. また, 任意の自然数 N に対し, k の総実な 2^N 次拡大 F で, $\lambda(F) = \mu(F) = 0$ となるものが無限個存在する.

定理 1, 2 の不等式において, 下極限 $\liminf_{X\to\infty}$ を $\lim_{X\to\infty}$ に置き換えた値が存在するならば, それらは岩澤不変量が消える 2 次拡大の「密度」と呼ばれるべき量である. この極限値の存在は未だ示されていないが, 定理 1, 2 は, 存在を仮定した場合

の, 下からの評価を与えている. 特に定理 2 は, $p=3$ に対して「自明に」Greenberg 予想が成立するような k の総実 2 次拡大の「密度」の, 下からの評価を与えている.

例として $k=\mathbb{Q}$ の場合を考える. (Nakagawa-Horie [11] 参照.) $k=\mathbb{Q}$ であれば, $\mathcal{C}$ はすべての虚 2 次体の集合に他ならない. 各 2 次体 K の判別式の絶対値を D_K とすれば, $D_{K/\mathbb{Q}}=D_K$ であって, 定理 1 により,

$$\liminf_{X\to\infty}\frac{|\{\text{虚 2 次体 } K \mid \lambda(K)=\mu(K)=0, D_K\leq X\}|}{|\{\text{虚 2 次体 } K \mid D_K\leq X\}|}\geq\frac{5}{16}.$$

また 定理 2 の仮定が満たされて, $\mathcal{T}$ は すべての実 2 次体の集合に他ならないから, 定理 2 によって,

$$\liminf_{X\to\infty}\frac{|\{\text{実 2 次体 } K \mid \lambda(K)=\mu(K)=0, D_K\leq X\}|}{|\{\text{実 2 次体 } K \mid D_K\leq X\}|}\geq\frac{25}{48}.$$

2 よく知られた判定法.

この節では前節の記号を踏襲して, (相対) 岩澤不変量が消える為の, よく知られた十分条件を二つ述べる.

有限次代数体 K の類数を $h(K)$ と書く. よく知られているように, K が CM-体の時, $h(K^+)\mid h(K)$ であるから, $h_K^-=h(K)/h(K^+)$ とおいて K の相対類数と呼ぶ.

判定法 1.

有限次 CM-体 K について, 次の条件は同値である.

(1) $\lambda^-(K)=\mu^-(K)=0;$

(2) $3\nmid h_K^-$ かつ 3 の上にある K^+ の素点はどれも K で不分解.

この判定法は, 有限次 CM-体の basic $\mathbb{Z}_l$-拡大 (l は勝手な奇素数) に対して成り立つ. (Friedman [4]) これにより, 前節の定理 1 は, CM-体 K で, その最大実部分体

が予め指定された k に等しく, 上の条件 (2) を満たすものの「密度」の下限の評価に帰着する.

K を再び一般の有限次代数体とする. 次の命題はよく知られている.

判定法 2. (Iwasawa [9])

K_∞/K を前述の通り basic $\mathbb{Z}_3$-拡大とするとき, $3 \nmid h(K)$ であり, かつ T が一つだけの元からなる, すなわち K の素点で 3 の上にあるものは一つしかないとすれば,

$$\lambda(K) = \mu(K) = 0$$

が成立する.

これにより, 前節の定理 2 は, 予め指定された総実代数体の, 総実な 2 次拡大で, 3 の上にある素点の分岐の様子と, 類数が 3 で割れないものの「密度」の下限の評価に帰着する.

いずれの場合でも問題は, (相対) 類数の 3 での非可除性と, 3 の上にある素点の分岐に条件をつけた 2 次拡大の「密度」の下限 > 0 に帰着された. このような問題は, すでに Davenport and Heilbronn [1], Nakagawa-Horie [11], Datskovsky-Wright [2][3] などで研究されてきた.

CM-体の相対類数の可除性に限って言えば, 例えば次の事が知られている. k を総実代数体として固定する. 勝手な自然数 n について, CM-体 K で, $K^+ = k$ かつ, k のイデアル類群 C_k から K のイデアル類群 C_K への自然な写像が単射になり, さらに, C_K の部分群 H で,

$$H \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \qquad H \cap C_k = 1$$

となるものが無限個存在する.(Naito [12]. 最も基本的な $k = \mathbb{Q}$ の場合は Uchida [14], [15] ならびに Yamamoto [19] 参照.)

また CM-体の相対岩澤不変量に関しては, 次の事が知られている. 上と同じく, k を有限次総実代数体とする. 奇素数 l に対し,

$$\Omega_l = \{ \text{ CM-体 } K \mid K^+ = k, \quad \lambda_l^-(K) = \mu_l^-(K) = 0\}$$

と置く. ただし $\lambda_l^-(K)$, $\mu_l^-(K)$ は K の basic $\mathbb{Z}_l$-拡大の相対岩澤不変量である. $k = \mathbb{Q}$ なら (すなわち K が虚 2 次体なら) Ω_l は, 任意の奇素数 l に対して無限集合である. (Horie [7]). また k が $\mathbb{Q}$ とは限らない総実代数体のときも, 全ての奇素数 l に対して Ω_l が無限集合であると予想されている. (Horie [6]). この場合, k にのみよって定まる有限個の素数を除いて, すべての奇素数 l に対して, Ω_l は無限集合である (Naito [13]) ことが示されている. 我々の前節定理 1 は予想を $l = 3$ の時に, 任意の k に対して確認したことになる. また, Ω_l の「密度」は, $k = \mathbb{Q}$, $l = 3$ の時が Nakagawa and Horie [11] で扱われている. 本稿はこの線に沿ったものである.

3 相対 3 類数の平均

この節では, k を勝手な有限次代数体, M_∞ を k の無限素点全体の集合, r_2 を k の虚な無限素点の個数とし, また $\alpha : M_\infty \to \{-1, 1\}$ を勝手な写像とする. $\nu(\alpha)$ を, k の実素点 v で, $\alpha(v) = 1$ となっているものの個数とする. α は k の 2 次拡大の族 Q_α を次のように定める. すなわち, k の 2 次拡大 F で, k の各実素点 v について, $\alpha(v) = 1$ なら v は F で分解し, $\alpha(v) = -1$ なら v は F で分岐するという条件を満たすもの全体を Q_α とするのである. S, S', S'' を k の, どの二つも有限素点の互いに交わらない有限集合とする. $Q_\alpha(S, S', S'')$ を, $F \in Q_\alpha$ で, $v \in S$ は F で分岐, $v' \in S'$ は F で惰性, $v'' \in S''$ は F で分解しているものの全体とする. $F \in Q_\alpha$ に対し, $N_{F/k} : C_F \to C_k$ を F の ideal 類群から k のそれへの norm 写像とする.

$h_3^*(F/k)$ を, F の ideal 類 η で, 次の条件を満たすものの個数とする：

$$\eta^3 = 1, \quad N_{F/k}(\eta) = 1.$$

F が CM-体のとき, $h_3^*(F/k) = 1$ と F の相対類数が 3 で割り切れないこととは同値である.

定理 3.

$$\lim_{X \to \infty} \frac{\sum_{\substack{F \in Q_\alpha(S,S'S'') \\ D_{F/k} \le X}} h_3^*(F/k)}{\sum_{\substack{F \in Q_\alpha(S,S'S'') \\ D_{F/k} \le X}} 1} = 1 + 3^{-r_2 - \nu(\alpha)}.$$

特に, $Q_\alpha(S, S', S'')$ に属する F で, $h_3^*(F/k) \neq 1$ を満たすものも, $h_3^*(F/k) = 1$ を満たすものもそれぞれ無限個存在する.

証明.

まず $S'' = \emptyset$ の場合を示す. 自然数 N を固定する. k' を, k の 非巡回 3 次拡大で, k のどの素点も k' で完全分岐せず, k'/k の相対判別式のノルム $D_{k'/k} = N$ となるものとする. このとき k' の k 上の共役体も同じ条件を満たす. L を k' の k 上の Galois 閉包とすると, $\mathrm{Gal}(L/k)$ は 3 次対称群と同形である. F を L に含まれる唯一の k の 2 次拡大とする. このとき L/F は 3 次不分岐巡回拡大で, L/F の相対判別式は k'/k のそれと一致することが知られている. (Hasse [5]) すると L は, F の ideal 類群の指標 $\chi \neq 1$ で, $\chi^3 = 1$ かつ $\chi\chi^\sigma = 1$ となるものと, 類体論により 2 : 1 に対応する. ここで σ は $Gal(F/k)$ の 1 でない元である. さらに $F \in Q_\alpha(S, S', \emptyset)$ なら, S, S' の元はそれぞれ k' で分岐, 惰性する事もわかる. $U(N)$ を, k の非巡回 3 次拡大 k' で, k のどの素点も k' で完全分岐せず, $D_{k'/k} = N$ となるものの全体とすれば, 以上で $|U(N)| = (3/2) \sum_{F \in Q_\alpha(S,S',\emptyset), D_{F/k}=N} (h_3^*(F/k) - 1)$ がわかった. さて

Datskovsky and Wright [2], [3] の結果を精密化することにより,

$$\lim_{X\to\infty} \ \frac{1}{X}\Big|\bigcup_{N\le X} U(N)\Big|,$$
$$\lim_{X\to\infty} \ \frac{1}{X}\Big|\Big\{F\in Q_\alpha(S,S',\emptyset)\ \Big|\ D_{F/k}\le X\Big\}\Big|$$

が求まるので, 上の事と併せて $S''=\emptyset$ の場合の定理が示される. さらに次の式が成り立つ:

$$Q_\alpha=\bigsqcup Q_\alpha(S\cup T', S\cup T'', S''\setminus(T'\cup T'')).$$

ただし右辺は S'' の部分集合 T', T'' で互いに交わりのないもの全体にわたる disjoint union である. この等式と, 定理の右辺が $|S''|$ に依らない事から, $|S''|$ についての帰納法で定理が示される.

注.

代数群 GL_2 と, その 2 元 3 次形式の空間への表現との組は, いわゆる概均質ベクトル空間となる. k 係数の 2 元 3 次形式に対し, その最小分解体をとる事によって, 上の概均質ベクトル空間の軌道と k 上の 3 次体とが関係する. 一方 Datskovsky and Wright (loc. cit.) は, この概均質ベクトル空間を, 大域体すなわち代数体と有限体上の一変数代数関数体, ならびにそれらの素点でそれらを完備化して得られる局所体の上で取扱い, 特にゼータ関数の理論を精密に展開した. その結果, 上の証明で引用したような, 大域体の 2 次拡大, 3 次拡大の密度定理を与えた. Wright and Yukie [18] により, より高次の拡大をパラメトライズする概均質ベクトル空間が得られているが, ゼータ関数の理論が充分に成熟していないようである. 我々の方針で 3 以外の素数について議論できないのは, 主としてこのような事情による.

また, 類数が 3 で割れず, 3 が不分解な (よって basic $\mathbb{Z}_3$-拡大の λ-不変量が消えるような) 実 2 次体が無限個あることは, Kraft も全く別の方法で示している. (cf.

[10])

さて定理 3 から, 定理 1, 定理 2 の条件を満たす体がそれぞれ無限個存在する事を導こう. k を総実代数体とし, $\alpha : M_\infty \to \{-1, 1\}$ を, $\alpha(v) = -1 \quad (\forall v \in M_\infty)$ で定めれば, Q_α は k を最大実部分体にもつような CM-体の全体に等しい. k の素点で 3 の上にあるようなもの全体 T を含むように S をとり, さらに S', S'' を, S, S', S'' のどの二つも互いに交わらないように取れば, $K \in Q_\alpha(S, S', S'')$ に於いて k の素点で 3 の上にあるものは分岐するから, 特に不分解である. 定理 3 により $K \in Q_\alpha(S, S', S'')$ で $h_3^*(K/k) = 1$ なるものが無限個存在する. 判定法 1 により, このような K について $\lambda^-(K) = \mu^-(K) = 0$ である. 定理 2 についても同様である. $\alpha : M_\infty \to \{-1, 1\}$ を, $\alpha(v) = 1 \quad (\forall v \in M_\infty)$ ととればよい.

最後に定理 4 を述べる. ふたたび k を一般の有限次代数体とする.

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \{F \in Q_\alpha \mid \text{各 } v \in T \text{ は } F \text{ で不分解}\}, \\ R_\alpha^* &= \{F \in R_\alpha \mid h_3^*(F/k) = 1\} \end{aligned}$$

と置く.

定理 4.

$$\liminf_{X \to \infty} \frac{\sum_{\substack{F \in R_\alpha^* \\ D_{F/k} \le X}} 1}{\sum_{\substack{F \in Q_\alpha \\ D_{F/k} \le X}} 1} \ge \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3^{r_2 + \nu(\alpha)}}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{|T|} \prod_{v \in T} \left(\frac{q_v + 2}{q_v + 1}\right).$$

証明.

R_α の定義により, $R_\alpha = \sqcup Q_\alpha(T', T'', \emptyset)$. ここで右辺は $T' \cup T'' = T, \quad T' \cap T'' = \emptyset$ なるもの全体に渡る disjoint union, である. この事と, 定理 1 の証明の中で述べた 2 次拡大の「密度」の式とを併せて計算すれば定理が示される.

定理 4 で k を有限次総実代数体とし, 先と同じく α および S, S', S'' を取る事で定理 1, 定理 2 における「密度」の下限の評価が得られる.

最後になりましたが, この研究を進めるに当たって, 終始暖かく励まして下さった木村達雄先生, ならびに, 共同研究者でもあります堀江邦明先生に心から感謝の意を表したいと思います.

参考文献

[1] H. Davenport and H. Heilbronn, *On the density of cubic fields, II*, Proc. Royal Soc. A, **322** (1971), 405-420.

[2] B. Datskovsky and D. J. Wright, *The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms, II:Local Theory.*, J. reine angew. Math. **367** (1986), 27-75.

[3] B. Datskovsky and D. J. Wright, *Density of discriminants of cubic extensions*, J. reine angew. Math. **386** (1988), 116-138.

[4] E. Friedman, *Iwasawa invariants*, Math. Ann. **271** (1985), 13-30.

[5] H. Hasse, *Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörper-theoretischer Grundlage*, Math Z. **31** (1930), 565-582. Math. Abh. 26.

[6] K. Horie, *On CM-fields with the same maximal real subfield*, Acta Arith. LXVII (1994), 219-227.

[7] K. Horie, *A note on basic Iwasawa λ-invariants of imaginary quadratic fields*, Invent. Math. **88** (1987), 31-38.

[8] K. Horie and I. Kimura, *On the densities and the mean three-class-numbers of quadratic extensions of number fields.*, in preparation.

[9] K. Iwasawa, *A note on class numbers of algebraic number fields*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **20** (1956), 257-258.

[10] J. S. Kraft, *Class numbers and Iwasawa invariants of quadratic fields*, Proc. AMS, **124** (1996), 31-34.

[11] J. Nakagawa and K. Horie, *Elliptic curves with no rational points*, Proc. AMS. **104** (1988), 20-24.

[12] H. Naito, *On the ideal class groups of totally imaginary quadratic extensions*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. **32** (1985), 205-211.

[13] H. Naito, *Indivisibility of class numbers of totally imaginary quadratic extensions and their Iwasawa invariants*, J. Math. Soc. Japan, **43** (1991), 185-194.

[14] K. Uchida, *Unramified extensions of quadratic number fields.* I , Tôhoku Math. J. **22** (1970), 138-141.

[15] K. Uchida, *Unramified extensions of quadratic number fields.* II , Tôhoku Math. J. **22** (1970), 220-224.

[16] L. C. Washington, Introduction to cyclotomic fields. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, GTM 83.

[17] A. Weil, Basic Number Theory, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[18] D. J. Wright and A. Yukie, *Prehomogeneous vector spaces and field extensions*, Invent. Math **110** (1992), 283-314.

[19] Y. Yamamoto, *On unramified Galois extensions of quadratic number fields*, Osaka J. Math. **7** (1970), 57-76.